



Apprendre le nombre Cycle 1

Michel Fayol

Université de Clermont Blaise Pascal & CNRS

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr



Pourquoi en sommes-nous là?

- Importance des mathématiques pour la réussite académique et professionnelle ;
- Comparaisons internationales : très importantes différences et **inégalités** ;
- **Précocité** des inégalités : importance du milieu socio-culturel et de la préscolarisation ;
- Recherches : **espérer des améliorations** si interventions **précoces** ; sur quoi? comment prédire les performances ultérieures?
- Performances en mathématiques : **hétérogénéité des composantes** ;

2

Un bilan des difficultés

- Les enfants et les élèves éprouvent parfois des **difficultés** en arithmétique, même très précocement ; renforcées par l'image ;
- **Plusieurs domaines** concernés :
 - Propres aux **mathématiques** : sens du nombre, dénombrement, opérations, etc. ;
 - **Capacités générales** : langage, attention, mémoire de travail, vitesse, émotions, **anxiété** ;
 - **Instruction** dispensée, très tôt, familles ou école ;

Nov 2016

3

Objectifs

- **Permettre la réussite pour tous** ; individualiser ; gérer les apprentissages et les interventions :
 - **Prévenir** les échecs (mais non les obstacles) et l'anxiété : curricula ; démarches adaptées ; outils divers avec indications précisées ;
 - **Traiter en temps réel** les difficultés : aider à les surmonter ; connaissance des modalités d'apprentissage ; **formation des enseignants** ;
 - **Remédier** si les difficultés ne sont pas surmontées par les interventions pédagogiques en première intention ;

Nov 2016

4

Comment faire face?

- **Enseigner formellement et explicitement** ; souvent efficace ; effets attestés de l'enseignement structuré et explicite, avec feed-back ; programmer ; évaluer ;
- Induire les savoirs et savoir-faire par le biais **d'activités ludiques** (plus ou moins), conçues de manière à **contraindre les acquisitions** ; apprentissage implicite ;
- École maternelle et école élémentaire ;

Nov 2016

5

Au total

- **Des notions** : cardinal ; ordre ; unité ; itération de l'unité ; commutativité ; inversion ; correspondance terme à terme ;
- **Des savoir-faire** : comparer ; mettre en ordre ; chaîne verbale (noms de nombres, chiffres arabes dans l'ordre) et comptage ; dénombrer ;
- **Passages** du nombre à l'action (donner, avancer, etc.) ; de l'action au nombre (comptage, etc.) ; relations avec l'espace ; des situations aux traitements ;
- **Des leures** : espace occupé, longueur, etc.

Dakar, Fév 2017

Des apprentissages

- **Lents et hiérarchisés** : 1-2 ; 3 ; 4-5 ; 6 ; 7-8-9-10 ;
- **Dépendant des situations** : mettre autant ; donner n (autant, plus moins) ; prendre ; dénombrer (séquentiel, spatial, digital) ; composer, décomposer ; ordonner ;
- **Mobilisant** (dynamique dans le temps) : perception ; évocation ; calcul mental ;

Nov 2016

7

Que savent-il à l'entrée en maternelle?

Trois types de savoirs

Les petites quantités; les grandes quantités; des noms de nombres

Nov 2016

8

En résumé

- Dès l'entrée à l'EM, **des différences importantes entre enfants** concernant :
 - La discrimination des petits ensembles ;
 - La discrimination des « grandes » quantités ;
 - La connaissance des noms de nombres et des chiffres arabes ;
 - L'attitude et les émotions en relation avec les nombres ;

Nov 2016

9

Cycle 1

- Assurer le passage **d'un traitement intuitif et approximatif** des **grandeurs et quantités**, disponible dès la naissance mais qui s'affine au fil du temps, **à un traitement précis** (et conforme aux contraintes culturelles) de ces mêmes grandeurs et quantités dont on attend qu'il soit **en place à l'entrée à l'école élémentaire** ou en fin de CP ;

Nov 2016

11

Ce qu'ils ne savent pas

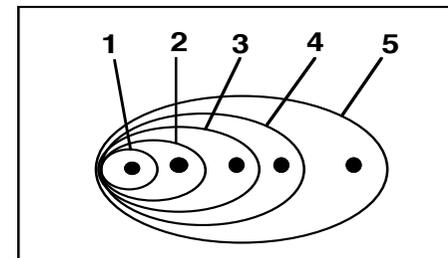
- À quoi servent les nombres et noms de nombres ; relation entre subitizing et comptage ;
- Dénombrer de manière précise ;
- Relier les noms de nombres (ou les chiffres arabes) aux quantités ;
- Comment fonctionne le système numérique ; compositions et décompositions ;
- Évoquer les quantités à partir du verbal ou des noms de nombres ;

Nov 2016

10

Logique numérique: but du Cycle 1

Le nombre comme ensemble de classes emboîtées et ordonnées



Emboîtement (2 inclus dans 3, etc.), abstraction du cardinal, itération de l'unité (4 c'est 3 et encore 1), égalité des distances entre successeurs (entre 7 et 8 = entre 2 et 3), relation d'ordre

Nov 2016

12

Des propriétés

- La quantification est précise ;
- Cardinal peut s'obtenir par **correspondance terme à terme**, sans dénombrer ; indépendance par rapport aux caractéristiques perceptives ; compositions et décompositions ;
- Cardinal peut s'obtenir par **dénombrement** : correspondance entre noms de nombres (symboles) et entités ; itération de l'unité (4 c'est 3 et encore 1) ; égalité des distances entre successeurs (entre 7 et 8 et 2 et 3) ;¹³

De la représentation analogique à la représentation verbale

• Deux problèmes :

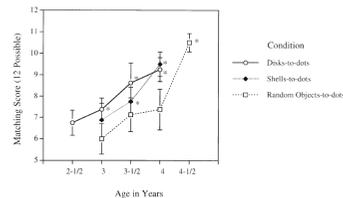
–**Catégorisation** : la cardinalité devrait être indépendante par rapport aux caractéristiques perceptives des collections (3 étoiles, 3 fournis, 3 voitures) ;

–**Le langage code la quantité par l'ordre** : 6 est plus grand que 5 puisque 6 vient après 5 ; les enfants doivent apprendre à évoquer la quantité à partir de la succession des mots de nombres ;

Nov 2016

14

La notion de cardinal: abstraite



La reconnaissance de l'**équivalence numérique** (= le **cardinal**) de petites quantités (2, 3 et 4) est d'autant plus facile chez les plus jeunes (jusque vers 4 ans) que:

- Les entités se ressemblent ;
- La disposition spatiale est proche ;
- Les enfants connaissent la suite conventionnelle des noms de nombres ;

Nov 2016

15

La correspondance Terme à Terme (CTT)

	Inférer le nombre	Inférer la correspondance
Pour n = 3 ou 4		
3 ans	.74	.71
4 ans	.93	.88
Total	.82	.84
Pour n = 6 ou 7		
3 ans	.66	.59
4 ans	.79	.88
Total	.72	.72

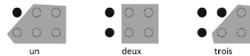
Dès 3 ans peuvent inférer la numérosité de 2 collections mises en CTT, et raisonner sur l'appariement de deux collections dénombrées. Vrai avec petits nombres. Au delà de 4, labilité et inconsistances

Nov 2016

16

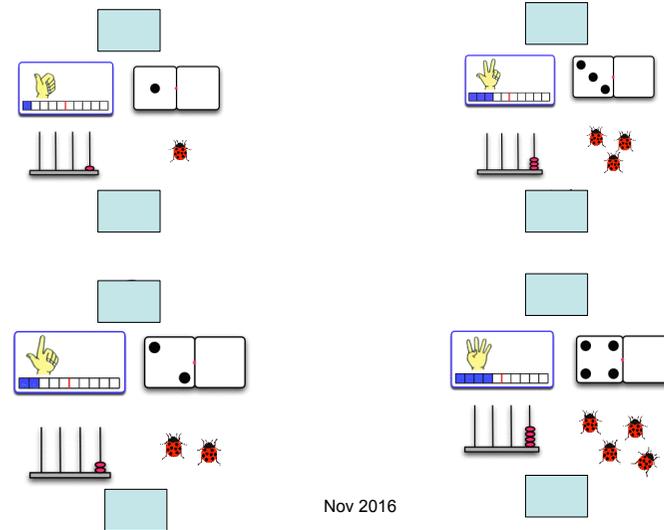
Que faire?

- **Nombreuses activités** de mise en correspondance avec des entités différentes en tailles, couleurs, fonctions, etc. ;
- Variations des **dispositions**, des regroupements ;
- **Collections témoins** de doigts (contribution à l'abstraction du cardinal) ; (3 fourmis -> 3 doigts ; 3 doigts -> 3 fourmis) ;



17

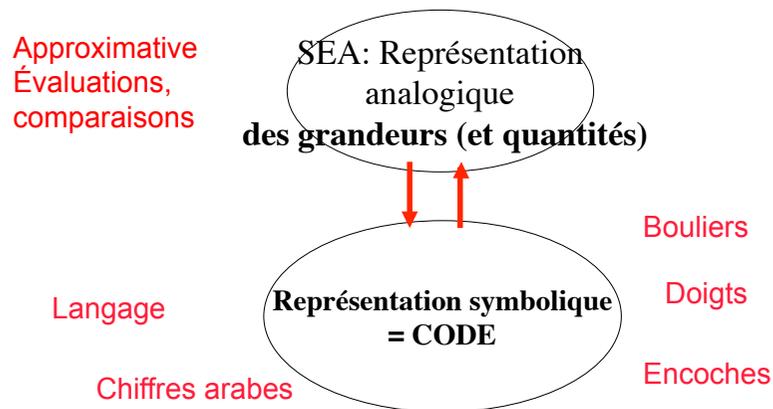
Différents codes analogiques



Nov 2016

18

Associer les symboles aux quantités et utiliser les deux



Nov 2016

19

L'importance des codes

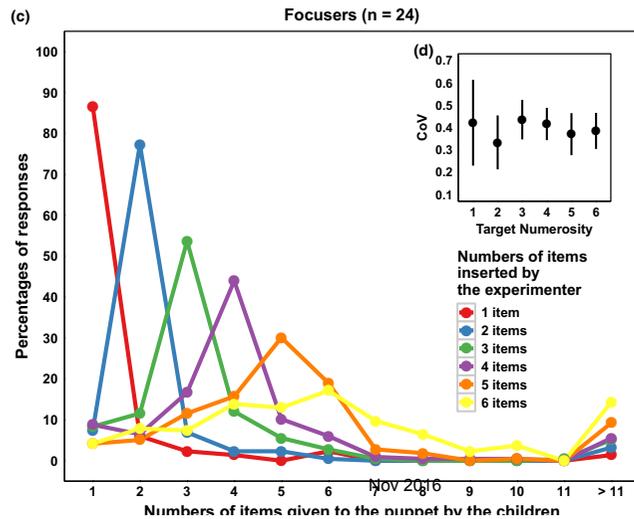
- Essayez de résoudre:
- XXXIV x XXIII
- CXXIX - XXXVIII
- Ce ne sont pas les quantités qui posent problème, mais **leur codage** et la **manipulation** des codes;
- Source principale de difficulté: le **code**; sa **signification**; sa **vitesse** d'accès (dans les 2 sens); sa **manipulation**;



Nov 2016

20

Nombre d'entités insérées



21

Un constat

TYPES DE TACHES	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
-Reproduire un nombre donné d'objets	1	-	3	-	-	4	-	-
-Montrer autant de doigts que d'objets	-	1-2	-	3	-	4	-	-
-Montrer autant d'objets que de doigts	-	1-2	-	-	3	4	-	-
-Imiter un nombre de coups frappés	-	-	1	-	2	-	3	-
-Dire combien on a entendu de coups	-	-	-	-	1-2	3	-	4
-Dire combien d'objets sans compter	1	2	-	-	3	-	-	4 à 10
-Donner un certain nombre d'objets à 1, 2, 3 personnes	1 à 4	1 à 5	1 à 6	-	1 à 7-8	1 à 10	-	-
-Répéter la suite des nombres	-	-	-	-	2 à 6	7 à 10	-	-
-Dénombrer avec les doigts	-	-	-	-	2 à 6	7 à 10	-	-

Descœudres, 1921

La réussite à traiter 3 dépend des tâches à réaliser et de l'âge. Acquisitions limitées à des situations précises. Modularité des savoirs et savoir-faire.

22

La chaîne verbale

- Les enfants apprennent très tôt et sans grand effort apparent, **la suite des noms de nombres** (la **chaîne verbale** : un, deux, trois, etc..) ; la vitesse d'apprentissage dépend de la régularité du code verbal ;
- La connaissance de la chaîne **ne garantit pas que les enfants sachent s'en servir** pour, par exemple, déterminer le successeur d'un nombre ou la plus grande de deux quantités ;
- Les enfants **ne généralisent pas** à l'ensemble des nombres les savoirs et savoir-faire qu'ils sont en mesure de mobiliser sur les petites quantités qu'ils maîtrisent: une fois parvenus à 4, ils ne sont pas capables de dire si 14 est plus grand que 13 alors même qu'ils réussissent pour 5 et 4 ;

Nov 2016

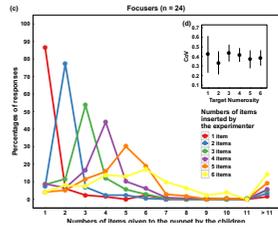
23

Plusieurs apprentissages

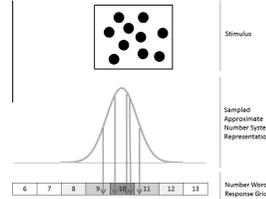
- Les enfants apprennent les noms des nombres un, deux et trois en les associant à des quantités ;
- Cette acquisition, **lente**, suit **un ordre** :
 - en premier « un » (vers 21/2 : sachant un) ;
 - puis 2 (vers 3 ou 31/2 : sachant deux) ;
 - puis 3 (vers 31/2 ou 4 : sachant trois) ;
- Cette acquisition est mise en évidence par, d'une part « Donne N », d'autre part « Combien y a-t-il sur une carte ? » ;
- Peu de temps après être devenus « sachant trois ou quatre », ils découvrent **le principe cardinal** et la fonction de successeur (N, N+1, (N+1)+1...) ; rôle des interventions?

Nov 2016

24



Que faire?



- Le problème est triple:
 - Raffiner les **capacités de comparaisons** des grandeurs et quantités ; établir l'**équivalence** des quantités ; **correspondances terme à terme** ;
 - Acquérir **un (ou des) système(s) symbolique(s)** (noms de nombres, chiffres arabes, ou autre) ;
 - **Associer les symboles aux quantités** dans les deux sens : cardinal (notion très abstraite) ; évocation et production automatiques ;

Nov 2016

25

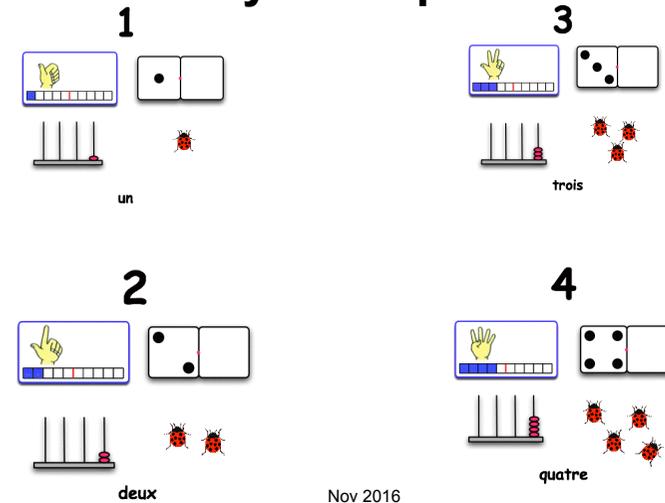
Plusieurs activités

- Reconnaître et dénommer les quantités ;
- Passer de n à $n + 1$ (et à $n - 1$) ;
- Comparer et ordonner les quantités ;
- Associer des collections-témoins (dominos, doigts) aux quantités et aux symboles ;
- Dénombrer: dire combien il y a ; donner x ;
- Distinguer le comptage du dénombrement ;
- Composer et décomposer ;
- Résoudre des problèmes ;

Nov 2016

27

Différents codes analogiques et symboliques



Nov 2016

26

Plusieurs activités

- Chercher des entités dissimulées dans des boîtes opaques (non verbal) ; comparer des ensembles hétérogènes (non verbal) ;
- Trouver le résultat d'ajouts ou de retraits (non verbal) ; puis verbal ;
- Déterminer si la CTàT permet de savoir combien sans compter (il y a autant de n que de m et il y a n , combien de m ?), verbal ;
- Passage du non verbal au verbal: grand problème ;

Nov 2016

28

Mémoire et transformations (non verbales)

On place 1 jeton (ou plus) dans une boîte opaque. On ajoute (ou on retire) 2, 3, 4 jetons **sans que l'enfant puisse voir le résultat**. On demande à l'enfant de produire lui-même le résultat avec ses propres jetons.



Mettre ensuite ou non en relation avec les symboles (1 + 4 = 5); étudier les stratégies;

Nov 2016

29

Ajouter ou retirer (max de 2 à 5) Présentation verbale

Âge	Tâche	numérosité			
		2	3	4	5
36	Addition	.86	.54	.33	.07
	Soustraction	1.00	.71	.38	.07
42	Addition	.88	.66	.25	.19
	Soustraction	1.00	.72	.40	.06
48	Addition	.81	.66	.19	.19
	Soustraction	1.00	.78	.42	.19

Très faibles performances au-delà de trois: résolution par évocation. Peu d'utilisation des doigts ou autres dispositifs.

Nov 2016

31

Les tout-débuts

	Boîte réelle fermée	Boîte évoquée	Présentation formelle
Petits nombres < 3	83%	56%	15%
Grands nombres > 3	28%	20%	6%

Jusque vers 5 ans 1/2, réussite lorsque les quantités sont petites et associables à des représentations spatio-temporelles (évocation en mémoire). Aller **progressivement de quantités manipulées à des quantités évoquées puis à des symboles**; des petites aux plus grandes quantités;

Nov 2016

30

Difficultés

- Percevoir les actions est plus facile que les évoquer à partir du langage ;
- Les noms de nombres sont des abstractions: beaucoup de temps avant de conduire à l'évocation des quantités précises ;
- Passer du comptage au cardinal ; et réciproquement (jeux de plateau) ; comptage et correspondance terme à terme ;

Nov 2016

32

Mises en correspondance progressives

- Configurations aléatoires ou conventionnelles (collections témoins ; doigts) ;
- Mots de nombres; chiffres arabes ; ne pas les confondre (transcodage) ;
- Quantités et symboles (dans les deux sens: précision, rapidité) ;
- Élaboration progressive par n, n+1, n+1+1, etc.

Nov 2016

33

Attention

- L'école n'est pas là pour constater les performances, mais...
- Pour **les faire évoluer dans le sens d'une pratique plus exacte, plus rapide, plus agréable** ;
- Les objectifs du cycle 1 sont impératifs ;

Nov 2016

34

Le dénombrement

Suite verbale, pointage moteur et coordination

Nov 2016

35

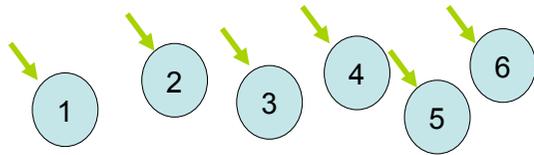
Le dénombrement

- Coordination de la mise en œuvre de **deux composantes, sources potentielles de difficultés** :
 - Composante **motrice** (pointage, mouvements des yeux, etc) ;
 - Composante **symbolique** (noms de nombres, chiffres arabes, formes signées) ;
 - Possible coût de cette **coordination**, qui s'ajouterait aux coûts de chacune des deux composantes ;
 - Quel impact chez les enfants TSL ou dyspraxiques? Trois sources de difficultés ;

Nov 2016

36

Dénombrer : procédure canonique



–Stricte **correspondance terme à terme** entre désignation des éléments et items servant à les désigner ;

–**Ordre stable** des éléments servant à désigner ;

–Le **dernier** élément énoncé fournit la cardinalité ;

–**Abstraction**: aucun impact de l' homogénéité ou de l' hétérogénéité ;

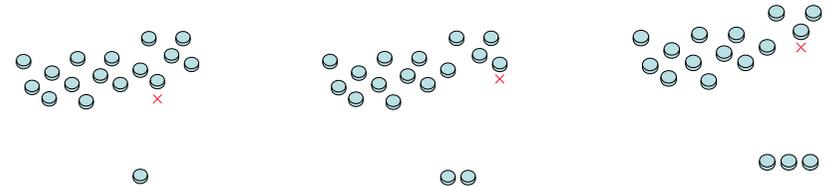
–**Non pertinence de l' ordre** du traitement ;

Landerl et al., 2004

Nov 2016

37

Dénombrer: cardinal



Éviter le comptage numérotage

Nov 2016

38

Performances en fin de GSM (70 mois) vers le CP

Principes	Pourcentages
Ordre stable (OS)	62.4
Correspondance T à T (CTT)	95.3
Cardinalité C	65.7
OS+CTT	59.1
OS+C	43.3
CTT+C	65.7
Les trois	44.2

Nov 2016

39

Activités avec nombres de plus en plus grands

- Reconnaître, dénommer, comparer et ordonner des collections ; puis les symboles correspondants ;
- Associer différentes représentations (livres à compter) ; utiliser des collections-témoins (doigts) ; **puis** des symboles ;
- Dénombrer (dire combien il y a) et donner x ; collections -> symboles ET symboles -> collections ;
- Composer et décomposer (un et encore un et encore un et encore un c'est quatre; deux et encore deux c'est quatre) ;
- Résoudre des problèmes : en actions ; à partir de petites histoires ; à partir de situations ; sous format abstrait ; passage progressif au verbal ;

Nov 2016

40

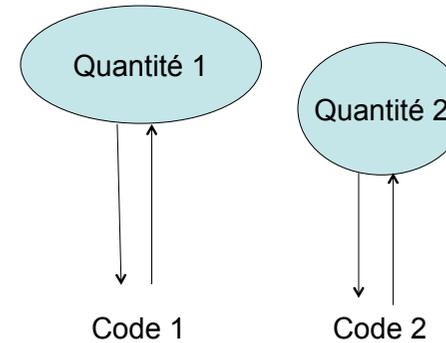
Des transformations aux opérations

Faire puis imaginer puis symboliser puis opérer sur des symboles

Nov 2016

41

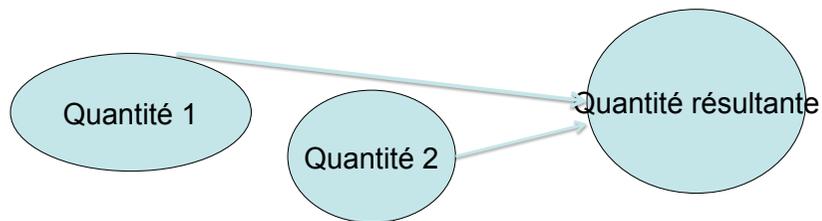
Les quantités et leur codage symbolique



Nov 2016

42

Les transformations



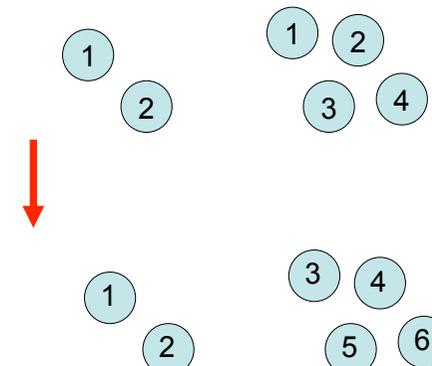
La réunion (ou l'extraction) physique portant sur deux quantités (ou plus) aboutit à une nouvelle quantité, résultante. **Intuition primitive très précoce.**

Nov 2016

43

Le tout-début : compter tout

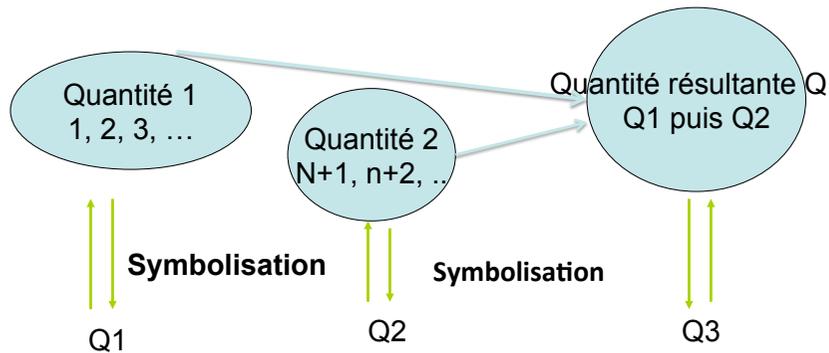
Compter tout (2 puis 4) : agir (réunir) puis dénombrer le total (6).



Laon APMEP Oct 2015

44

Des transformations vers les opérations



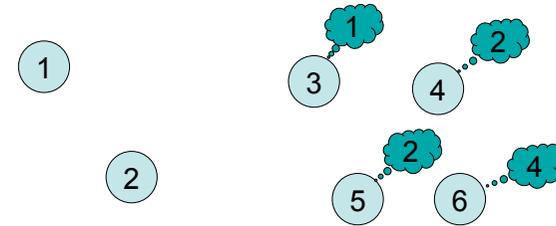
L'appariement de chaque ensemble avec un symbole permet d'aboutir à **un nombre pour chaque quantité** (Q1, Q2 et Q3). L'aboutissement est équivalent au parcours de Q1 puis de Q2 en un même dénombrement.

Nov 2016

45

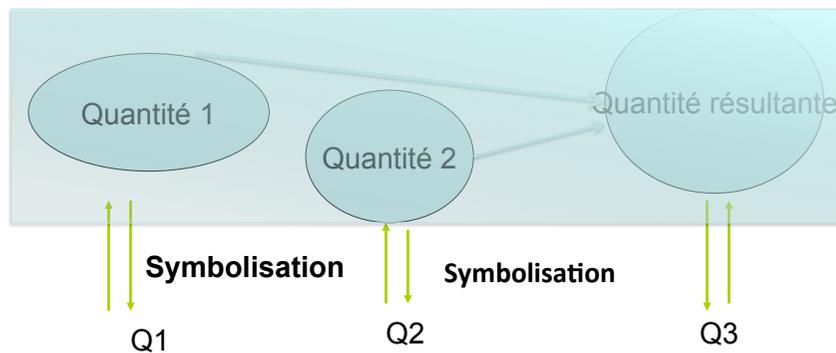
Puis : compter à partir du premier fourni

Avec objets présents: action dépendante de la présentation



46

Des transformations vers les opérations



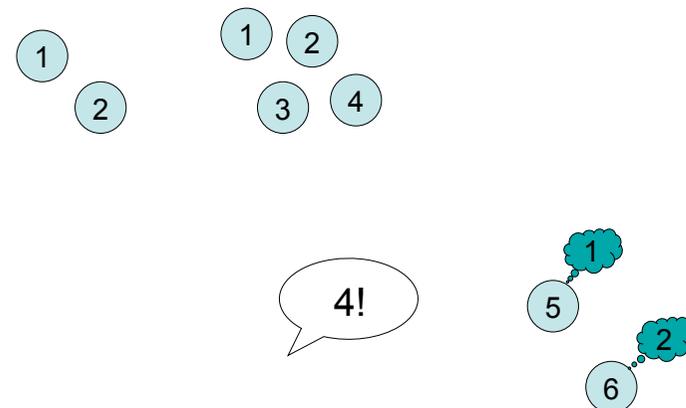
Passage de Q1 puis Q2 à Q1 +1, +2, +3..... Jusqu'à Q3. Puis commencer par le plus grand des deux (Min m, n)

Nov 2016

47

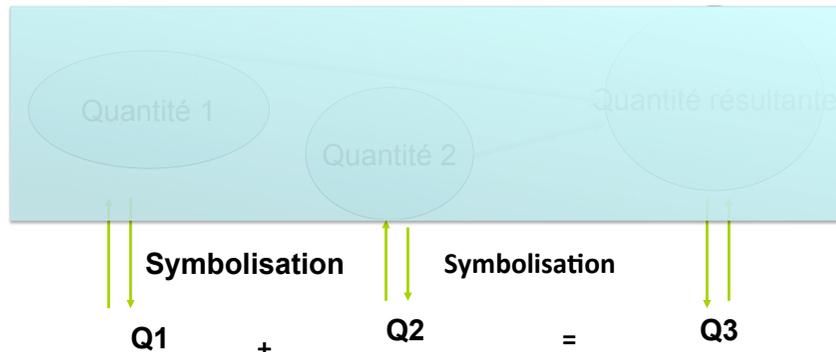
Puis : compter à partir du plus grand

Début des opérations : l'ordre de traitement s'autonomise par rapport à l'ordre de présentation : $a + b = b + a$



48

Les opérations



Puis commencer par le plus grand des deux (Min m, n) $Q1 + Q2 = Q2 + Q1 = Q3$

Compositions et décompositions ; faits ;
Commutativité de l'addition, non de la soustraction ^{Nov 2016} 49



Merci pour votre attention

Pour en savoir plus

Michel Fayol (2015 rééd). *L'acquisition du nombre*.
 Paris: Presses Universitaires de France, QSJ

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr

Pour conclure

- Trois années de travail ; tous les jours un peu ; des objectifs et du temps ;
- Progression à établir : très lente mais volontariste ; faire réussir et progresser ;
- Ludique pour l'enfant, pas pour les enseignant(e)s ;
- Compter ; dénombrer ; apparier ; composer/décomposer ; représenter (ligne numérique) ; ^{Nov 2016}

50