Le sens des opérations

+ − × ÷

Johann BONNEAU (EMFE)

- L’apprentissage des mathématiques développe l’imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement.
- La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1.

La résolution de problèmes fait l’objet d’un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations

Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable.

De premiers automatismes s’installent.

L’acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.

Quelques définitions

Une opération:

Une opération est la mise à « exécution d'une décision » : la décision qui consiste, à partir de deux nombres, d'en constituer un troisième, qui lui, est supposé répondre à une question posée au préalable.

Exemple: A partir de « 37 » et de « 21 » il est possible de constituer selon les besoins :

- par addition, « $37 + 21$ »
- par multiplication, « 37×21 »
- par soustraction, « $37 - 21$ »

Le calcul:

Un calcul n'est rien d'autre qu'un changement d'organisation. Ainsi effectuer le calcul de 37+21 consistera à défaire l'organisation obtenue pour lui préférer celle du système décimal.

Il y a donc deux étapes bien distinctes :

1. **Opérer**, par exemple, sur 37 et 21 par une opération qui s'appelle l'addition et qui permet d'obtenir la somme 37 + 21. On peut en rester là.

2. Si on utilise la calculatrice, elle attendra un second ordre, celui de dire combien ça fait. Donc une fois que nous, nous avons décidé d'opérer c'est-à-dire d'appuyer sur la touche +, ce que la calculatrice ne saurait faire seule, on peut lui donner l'ordre de **calculer** la somme.

On distinguera donc :

1. **l'opération/décision** et *ensuite*, s'il est à la fois souhaitable *et* possible de l'effectuer :

2. **le calcul**.

L’addition +

L’addition est une opération qui, à partir de deux nombres, donne un autre nombre appelé somme.

L’addition qui est la première opération enseignée aux enfants est aussi supposée être la plus facile. Or à l’évidence, les enfants nous montrent que ce n’est pas si simple pour tous.(beaucoup de tâches à effectuer)

Rappel : en trouvant combien font 17 + 35, on ne fait pas une addition puisqu’elle est déjà faite. On **calcule** une **somme**.

A quoi sert l'addition ? La langue courante ne fait pas la distinction entre « ajouter » et « additionner », pourtant nous la ferons pour distinguer deux opérations distinctes:

1) Additionner

Si nous disons qu'en CM1*A* il y a 24 élèves et qu'au CM1*B* il y en a 27 et qu'on se demande combien d'élèves de CM1 il y a en tout dans cette école on écrira 24 + 27= (On additionne 2 quantités)

2) Ajouter

Si on dit pour le cours de maths on aura 24 élèves et qu'ensuite pour le cours de natation on aura 8 élèves de plus, alors cette fois, 8 vient s'ajouter à 24. On écrira 24+8 (On transforme une quantité)

Les propriétés de l’addition:

- La commutativité: On peut changer l’ordre des termes.

  $7+2 = 2+7$

- L’associativité: On peut regrouper les termes de différentes façons.

  $(9+6)+4 = 9+(6+4)$

- L’élément neutre: Ajouter 0 à n’importe quel nombre ne change pas ce nombre.

  $0+4 = 4$

Lorsque les élèves additionnent 2 nombres ils doivent verbaliser leur procédure. Il est très important que les élèves sachent expliquer comment ils font.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 3\,8 \\ +\;2\,4 \\ \hline 6\,2 \end{array}$$

- Trente-huit plus vingt-quatre

- J'additionne les unités entre elles: 8+4= 12
(importance de la maîtrise des tables d'addition)

- Je pose 2 (chiffre des unités) et je retiens 1(chiffre des dizaines) *Attention au bon placement de la retenue.*

- J'additionne les dizaines entre elles: 3+2= 5 et j'ajoute la retenue (5+1= 6)

- J'écris le résultat et je n'oublie pas de barrer la retenue pour montrer que je l'ai comptée.

Matériel pour travailler l'addition par la manipulation: le boulier chinois

La multiplication ×

La multiplication est une opération qui, à partir de deux nombres, donne un autre nombre appelé produit.

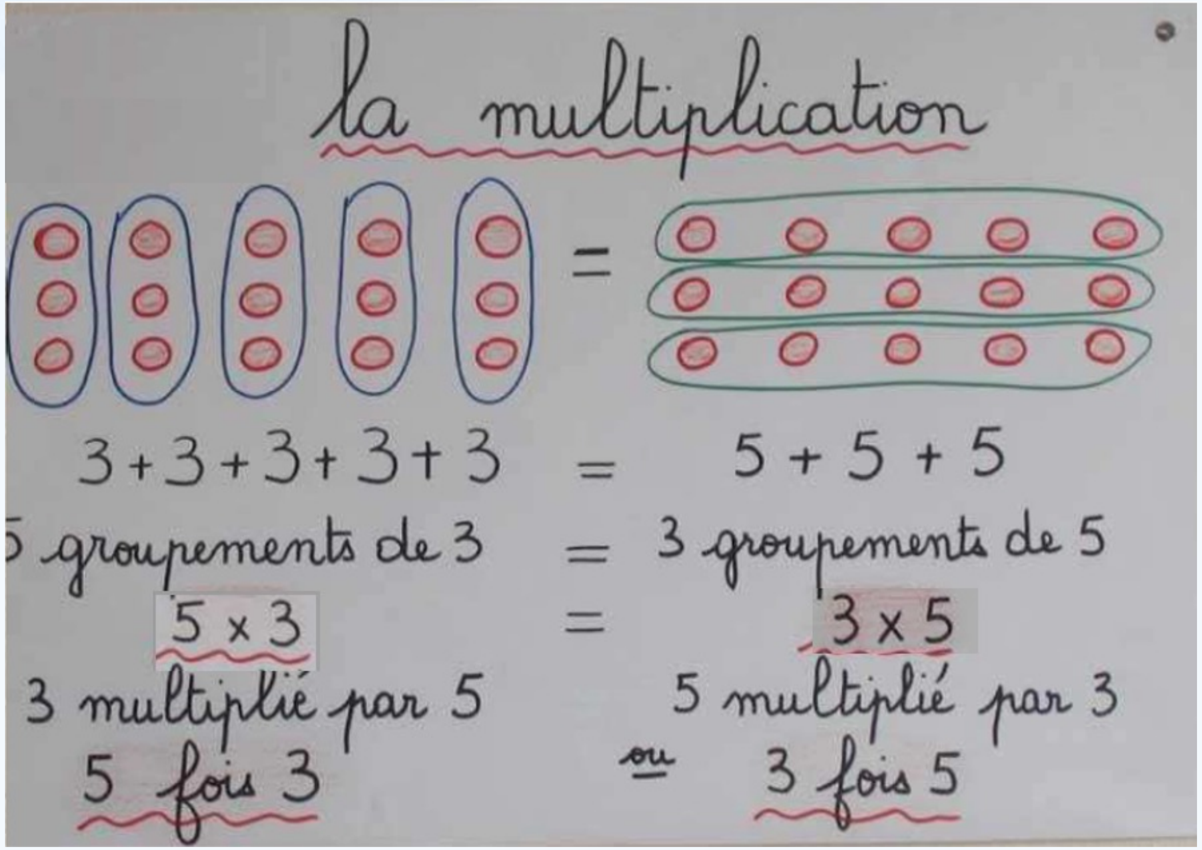
Il est souhaitable que les enfants comprennent (utilisent) les deux manières de lire le signe × : nous pouvons dire « **fois** » et « **multiplié par** » sans dictature d'une écriture imposée.

Comment concevoir ce produit ? (sens complexe de la multiplication)

Exemple 1:

- Calcul mental : produit de 13 x 2
- « treize fois deux », « deux fois treize » et « treize multiplié par deux »
- « treize fois deux » : le multiplicateur 13 est le nombre qui agit
- « deux fois treize » : 2 est l'opérateur (double de 13)
- « treize multiplié par deux » : aucune induction, l'élève choisit l'ordre le plus approprié.

Exemple 2:



La construction du sens de la multiplication et du produit de deux nombres doit s'appuyer sur la représentation première de l'opération. Sur l'idée que, quand on multiplie, on répète plusieurs fois le même nombre et qu'on obtient ainsi un nombre plus grand. (au cycle 2)

Exemple 2:

1) Pour installer le sens premier de la multiplication, il faut proposer aux apprenants de produire différentes écritures additives répétées en relation avec le mot « fois ».

4 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3

3 x 4 = 4 + 4 + 4

2) Puis introduire le signe « x » en faisant apparaître la commutativité :

« a fois b » et « b fois a » sont deux facettes d'un même nombre que l'on notera indifféremment « a x b » ou « b x a » appelée « a multiplié par b » ou « b multiplié par a »

<u>Commutativité</u>

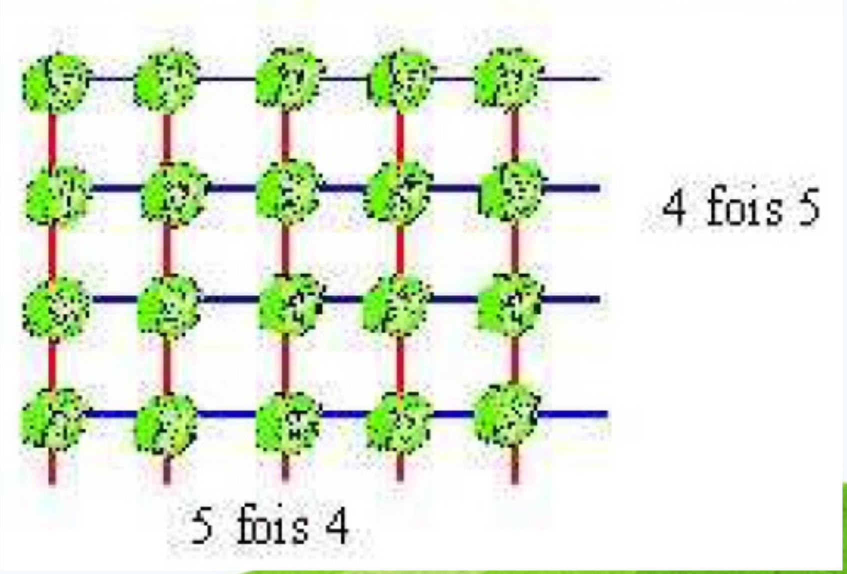
Cette notion très difficile à comprendre doit passer par une disposition en lignes et en colonnes.

On peut faire le choix, quand le sens de l’opération est effectif, **ne pas lier l’ordre de ce qui est lu avec l’ordre de ce qui** est écrit et de permettre l’écriture dans les deux sens.

« Un jardinier a cueilli 4 bouquets de 12 roses. Combien a-t-il cueilli de roses ? »

<u>L’élève (CE) doit avoir le choix </u>(calcul réfléchi)

- de représenter les résultats (colonnes, lignes)
- de faire des additions réitérées
- d’écrire le résultat sous la forme 4 x 12 ou 12 x 4



Les propriétés de la multiplication:

- **La commutativité:** On peut changer l'ordre des termes.

  $7\times 2 = 2\times 7$

- **L'associativité:** On peut regrouper les termes de différentes façons.

  $(2\times 8)\times 3 = 2\times(8\times 3)$

- **L'élément neutre:** Multiplier par 1 n'importe quel nombre ne change pas ce nombre.

  $1\times 4 = 4$

On rappelle que l’**addition** et la **multiplication** sont deux opérations **directes** qui structurent toute relation aux nombres.

Quelque soit le nombre choisi, il peut toujours être exprimé par une **organisation** en somme ou produit c’est-à-dire qu’il est possible de « couvrir » n’importe quel nombre entier.

Ces opérations directes sont **autonomes**.

La soustraction –

La soustraction est une opération qui, à partir de deux nombres, donne un autre nombre appelé <u>différence</u>.

La soustraction n'est plus une opération autonome, c'est une opération inverse. L'existence d'une différence suppose une mise à l'épreuve qui fait intervenir l'addition. En effet, $7 - 3$ n'a de sens que s'il existe un nombre qui ajouté à 3 donne une somme égale à 7.

A l'inverse, $3 - 7$ (dans le corps des entiers naturels) n'a pas de sens car il n'existe aucun nombre naturel qui ajouté à 7 donne une somme égale à 3.

Les 3 sens de la soustraction

Le sens « enlever »

Jessica à 26 images. Elle donne 4 images à sa cousine.

Combien lui en reste-t-il ? Ou Combien en a-t-elle maintenant ?

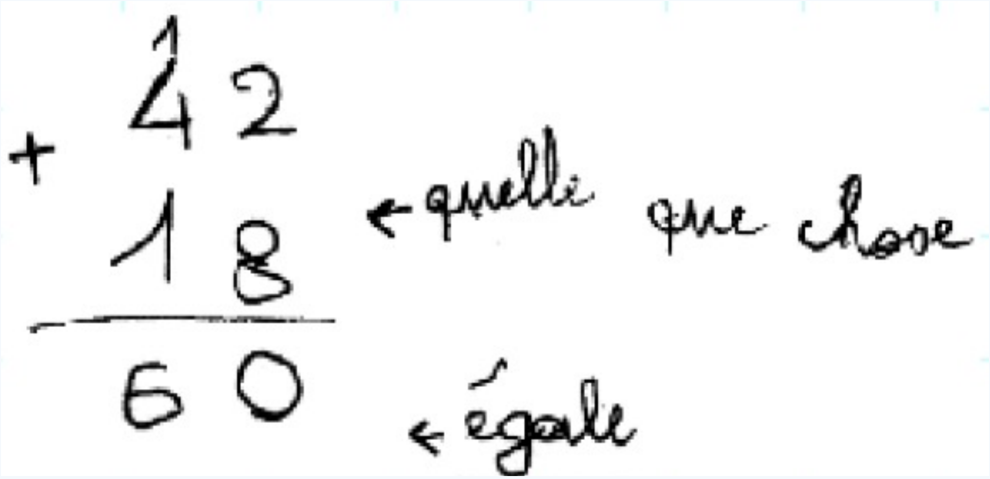
- Ce sens est rapidement compris des élèves. Il permet d'introduire le signe « - ».
- L'élève peut schématiser les 26 images et en barrer 4.
- L'élève peut décompter (calcul réel) : 25, 24, 23, **22**.

Au niveau du calcul, ce sens est particulièrement adapté lorsqu'on « enlève peu » ou lorsqu'on enlève un nombre entier de dizaines voire de centaines

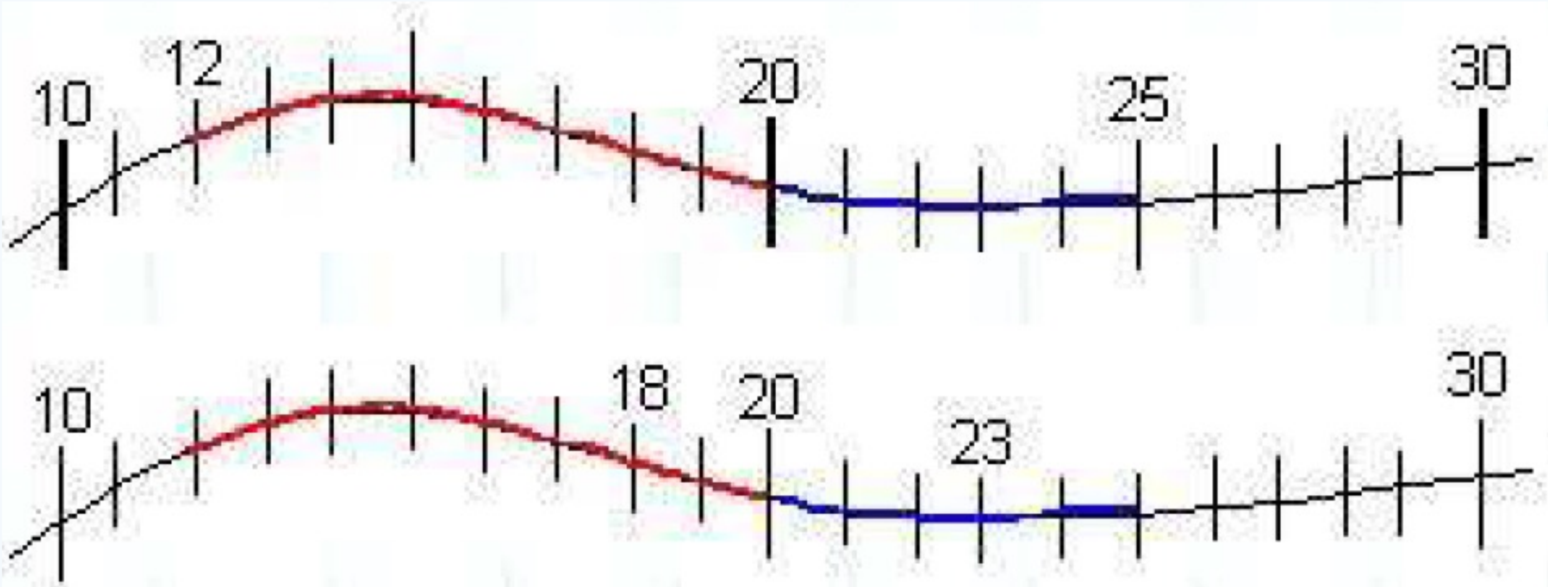
Le sens « pour aller à »

Lara avait 42 images. Raphaël lui donne d'autres images. Lara a maintenant 60 images. Combien d'images lui a donné Raphaël ?

42+ ? = 60. Ce sens facilite la recherche du résultat d'une soustraction lorsqu'on « enlève beaucoup ».



La représentation de la droite numérique est une visualisation intéressante pour l’élève.



Calculer en faisant des bonds :

Lara avait 42 images. Raphaël lui donne d’autres images. Lara a maintenant 60 images. Combien d’images lui a donné Raphaël ?

42 + ? = 60

de 42 à 50	8
de 50 à 60	10
de 42 à 60	18

Le sens « écart »

Léo a 13 images et Léa a 28 images. Qui a le plus d'images ? Combien en a-t-il en plus ?

L'écart entre deux nombres A et B (on suppose A < B) est le nombre :

- Qu'il faut ajouter à A pour obtenir B
- Qu'il faut enlever à B pour obtenir A.

Il faut transformer ce problème en une situation d'égalisation :

« Combien faut-il donner d'images à Léo pour qu'il en ait autant que Léa ? », ce qui conduit à un glissement vers le sens « pour aller à »

Les propriétés de la soustraction:

- La soustraction **n’est pas commutative.**

$7-2 \neq 2-7$

- La soustraction **n’est pas associative.**

Il faut respecter l’ordre des opérations en trouvant d’abord la différence

entre les parenthèses.

$12-(5-3) = 12-2 = 10$

$(12-5)-3 = 7-3 = 4$

- La soustraction **n’a pas d’élément neutre.**

Mathématiquement et logiquement, pour garder une quantité initiale après une soustraction, la quantité enlevée doit être 0.

0 est le 2e terme.	0 est le 1er terme.
Or $10-0 = 10$	mais $0-10 \neq 10$

Les deux techniques de la soustraction

1) La méthode « **traditionnelle** »

Elle repose sur la notion d’<u>écart constant</u>

« Méthode traditionnelle » : Conservation de l'écart entre 2 nombres et invariance du résultat

Jean a 62 € :

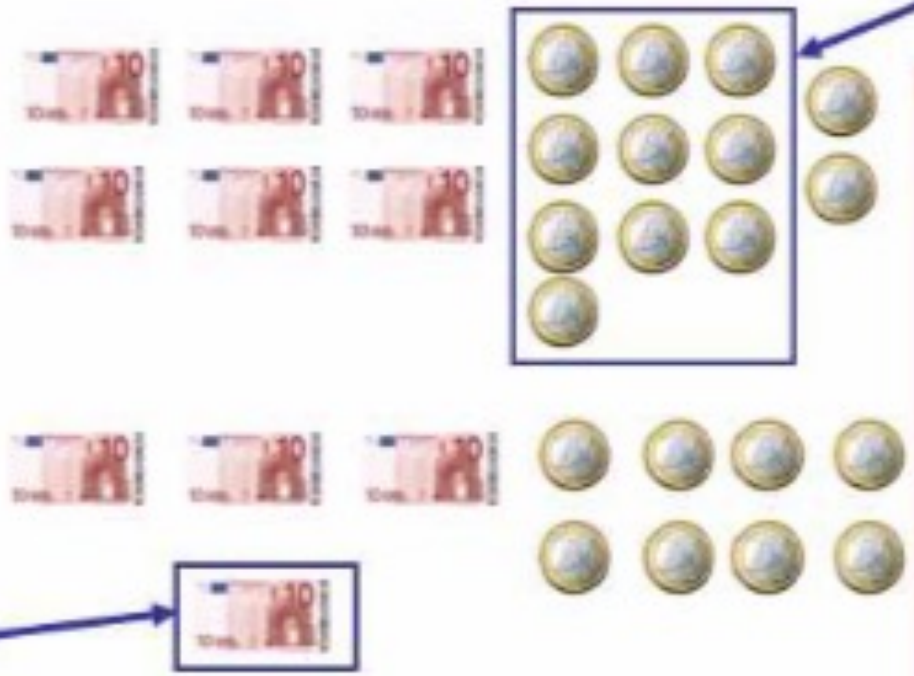
Jean donne 38 € à Paul.

	6	2
−	3	8
	?	

Combien reste t-il d'argent à Jean ?

Jean a 62 € :

Jean donne 38 € à Paul.



Sa grand-mère donne 10€ à Jean

Sa grand-mère donne 10€ à Paul

$$\begin{array}{rr} 6 & {}^{1}2 \\ - \; 3_{1} & 8 \\ \hline & ? \end{array}$$

La différence n'a pas changé

Jean et Paul ont chacun 10€ de plus.

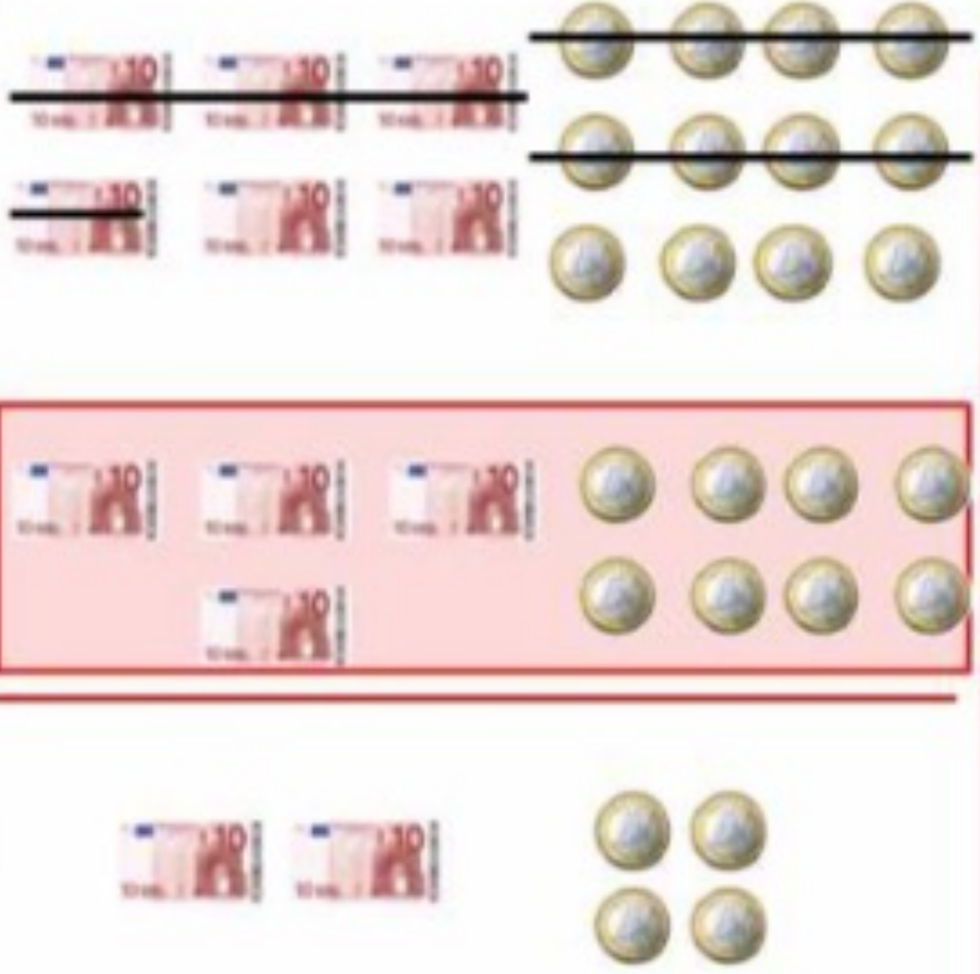
La différence n'a pas changé.

C'est comme si :

Jean avait 72 € :

Jean donnait 48 € à Paul

Il reste 24 € à Jean



$$\begin{array}{rcc} & 6 & {}_{1}2 \\ - & 3 & 8 \\ & {}_{1} & \\ \hline & 2 & 4 \end{array}$$

2) La méthode par « **cassage** » ou « **emprunt** »

Elle repose sur la décomposition des nombres $32 = 20 + 12$

« Méthode par cassage ou emprunt » : une autre écriture du premier terme

Jean a 62 € :

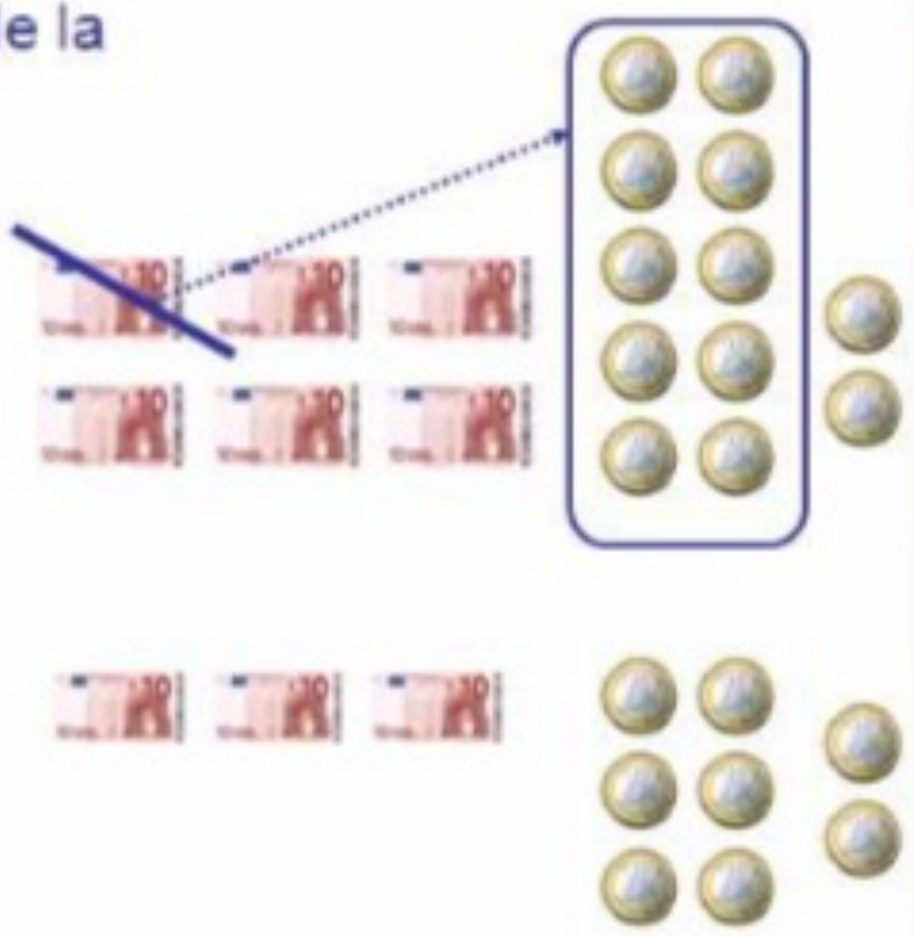
Jean donne 38 € à Paul.

Combien reste-t-il d'argent à Jean ?

$$\begin{array}{rr} & 6\quad 2 \\ - & 3\quad 8 \\ \hline & ? \end{array}$$

Jean va faire de la monnaie.

Jean a 62 € :



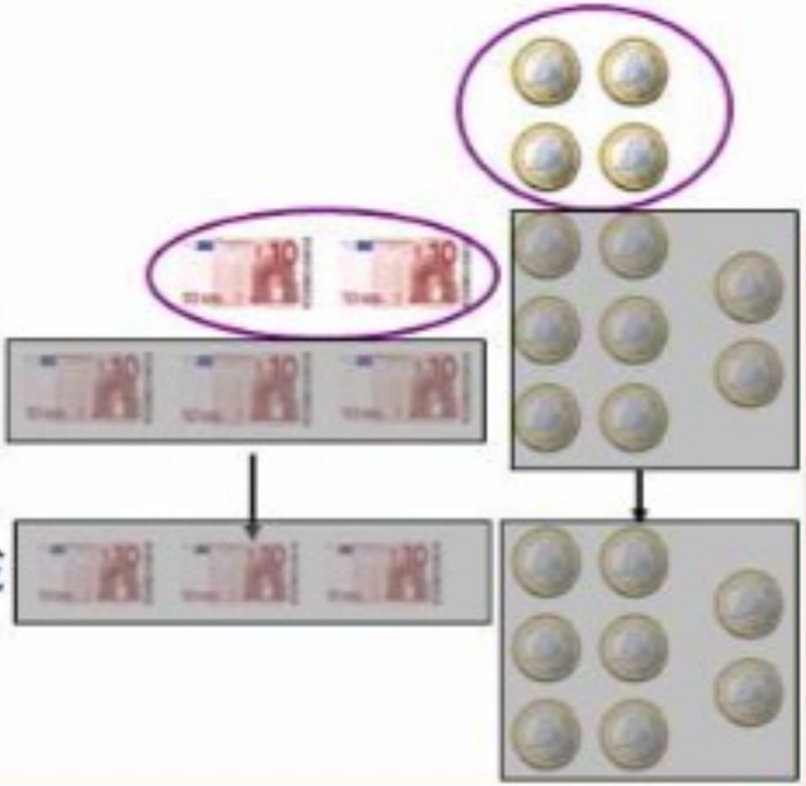
Jean donne 38 € à Paul.

$$\begin{array}{rrr} & 5 & \\ & \cancel{6} & 12 \\ - & 3 & 8 \\ \hline & & \end{array}$$

Combien reste-t-il d'argent à Jean ?

Argent de Jean :

Jean donne 38 € à Paul :

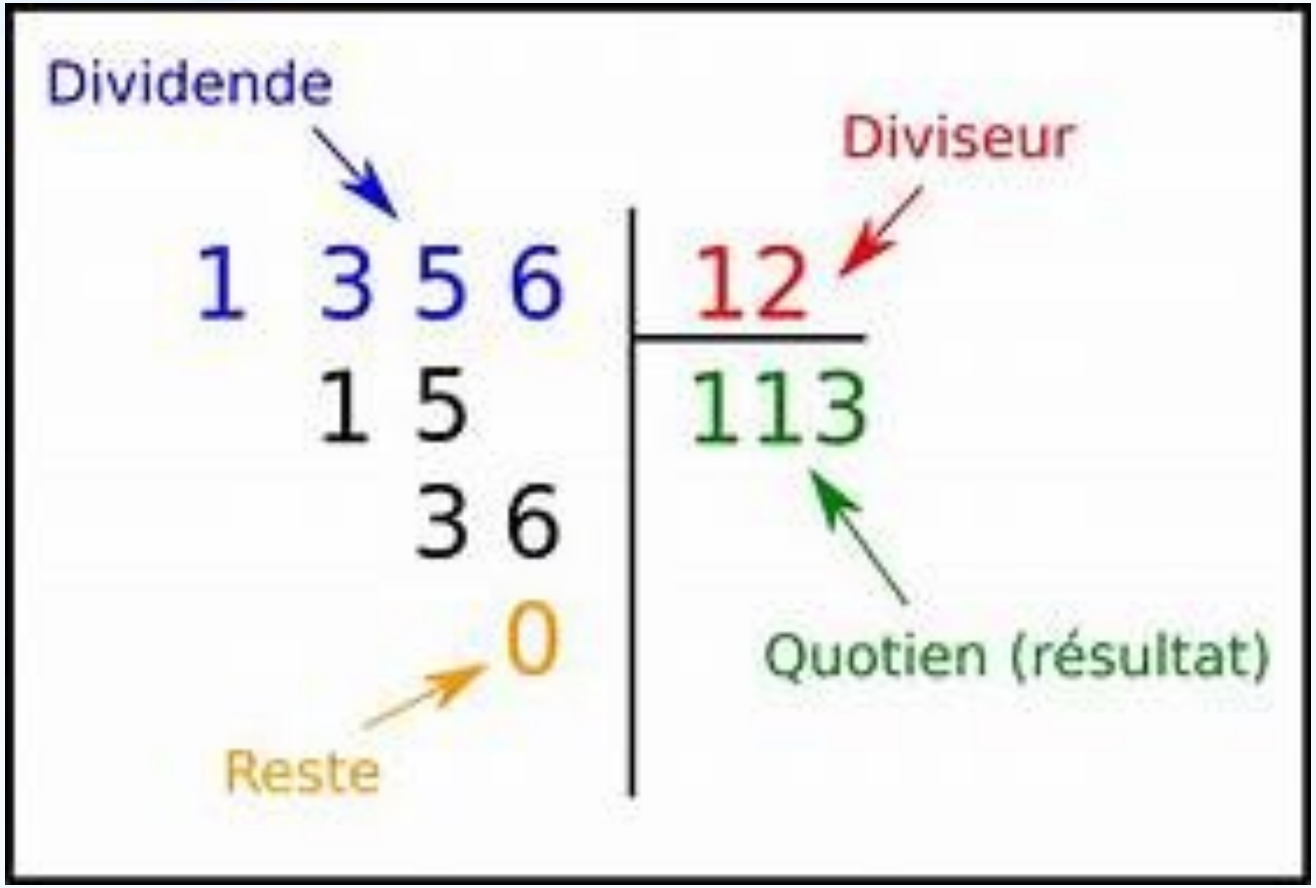


$$\begin{array}{rr} \overset{5}{\cancel{6}} & 12 \\ - \;\; 3 & 8 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$$

Il reste 24 € à Jean.

La division ÷

Division et vocabulaire



La division est une opération qui, à partir de deux nombres, donne un autre nombre appelé quotient.

1) La division **euclidienne**

Lorsque l’on divise deux nombres entiers et que l’on décide de s’arrêter « avant la virgule », on dit que l’on effectue leur **division euclidienne**. Effectuer une division euclidienne c’est donc trouver 2 nombres entiers: le quotient et le reste.

Exemple:

	5	4	1	1	2
-	4	8			
		6	1	4	5
	-	6	0		
			1		

Signifie que:

$$\mathbf{541 = (45 \times 12) + 1}$$

2) La division **décimale**

a est un nombre (entier ou décimal) et **b** est un nombre entier non nul.

La division décimale du nombre **a** par le nombre **b** permet de calculer le quotient exact de **a** par **b** ou une valeur approchée de celui-ci.

Exemple:

4 5 4 5, 0 0	6 0
- 4 2 0	
3 4 5	7 5, 7 5
- 3 0 0	
4 5 0	
- 4 2 0	
3 0 0	
- 3 0 0	
0	

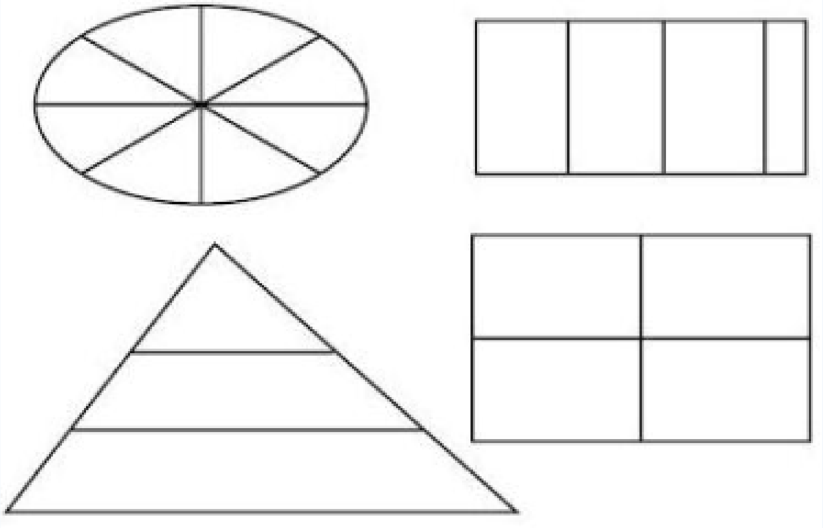
Dès que l'on abaisse le premier 0 « après la virgule » du dividende, on place une virgule au quotient.

75,75 est le quotient exact de 4 545 par 60.

Les sens possibles de la division

La notion de partage

Par les tris d'objets, les gâteaux à partager entre…



La notion de parts égales

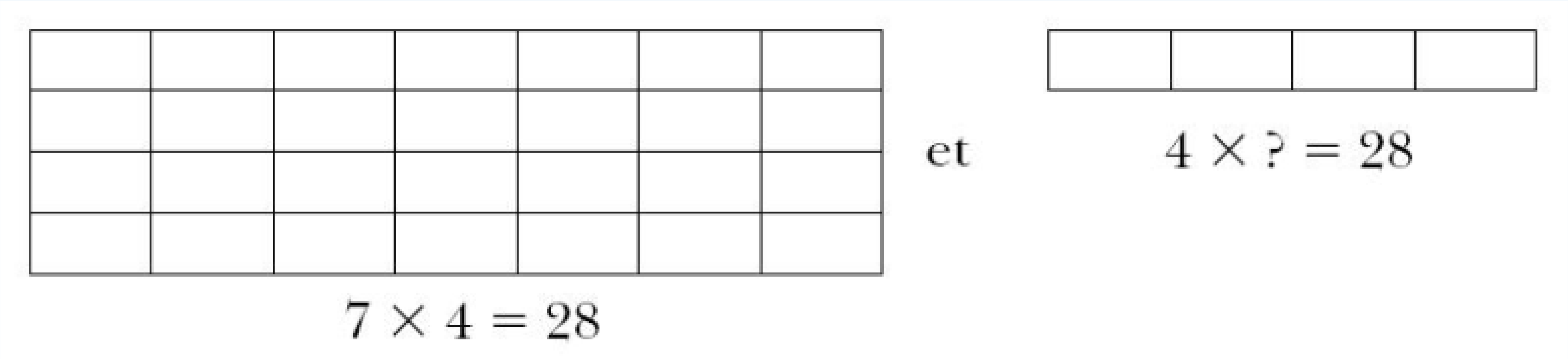
Maman a découpé 4 gâteaux.

- Est-ce que toutes les parts sont égales pour chacun des gâteaux ?
- Dans quels gâteaux les parts sont-elles égales ?
- Dans quels gâteaux sont elles inégales ?

Les notions de doubles, moitiés, triple, tiers…

Je possède un paquet de 16 gros calots et je veux en donner autant à Johnny, Sylvie et David. Combien de canettes pourra recevoir chaque camarade ?

Multiplication et notion de division exacte



Pour aller vers la division, il faut surmonter des difficultés :

1. Une bonne aisance des opérations (addition, multiplication, soustraction)

2. Une bonne aisance du calcul mental

3. Une parfaite connaissance des tables de multiplication

4. La technique usuelle nécessite l’emploi simultané de plusieurs opérations (citées plus haut)

5. Maintien en mémoire de résultats partiels

6. Les écrits successifs pour constituer le quotient sont le résultat d’une approximation

Les propriétés de la division:

- La division **n’est pas commutative.**

$110 \div 11 \neq 11 \div 110$

$10 \neq 0,1$

- La division **n’est pas associative.**

Il faut respecter l’ordre des opérations en trouvant d’abord le quotient entre les parenthèses.

$(0,72 \div 6) \div 3 \neq 0,72 \div (6 \div 3)$

$0,12 \div 3 \neq 0,72 \div 2$

$0,04 \neq 0,36$

- La division **n’a pas d’élément neutre.**

Mathématiquement et logiquement, pour garder une quantité initiale après une division, la quantité doit être divisée par 1.

1 est le 2e terme. 1 est le 1^{er} terme.

Or $10 \div 1 = 10$ mais $1 \div 10 \neq 10$